**3.7. Turunan Fungsi Logaritmis**

Jika f(x) = alog x, maka f '(x) =

Bukti : f(x) = alog x ⇒ f(x+h) = alog (x+h)

f(x+h) - f(x) = alog (x+h) - alog x

= ; [∵ alog (x+h) - alog x = ]

= alog ( 1 + h/x)

= alog ( 1 + h/x)h/x.x/h

= h/x . alog ( 1 + h/x)x/h ; [∵log xn = n log x]

f '(x) = 1/h (h/x . alog ( 1 + h/x)x/h)

= 1/x . alog ( 1 + h/x)x/h

= 1/x . ; [∵ a log b = ]

= ( 1/x . 1/ln a . ln ( 1 + h/x)x/h)

= 1/x 1/ln a . ln ( 1 + h/x)x/h

= 1/x . 1/ln a . ln (e)

= . ln e

= . 1

= ∎

∴ f(x) = log x ⇒ D ( log x) =

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = 7log x

b. f(x) = 4log x + 6log x

c. f(x) = ( 5log x)(3 x2 )

d. f(x) =

Penyelesaian: a. f(x) = 7log x

f '(x) =

∴ f(x) = 7log x ⇒ f '(x) =

b. f(x) = 4log x + 6log x

Misal g(x) = 4log x ⇒ g'(x) =

Misal h(x) = 6log x ⇒ h'(x) =

∴ f '(x) = + ; [∵ h(x) = f(x) + g(x) ⇒ h'(x) = f ' (x) + g ' (x)]

c. f(x = ( 3log x)(3 x2 )

Misal g(x) = 3log x ⇒ g'(x) =

Misal h(x) = 3 x2 ⇒ h'(x) = 6x

f '(x) = 3log x . 6x + 3 x2 .

∴ f '(x) = 3log x . 6x + 3 x2 .

d. f(x) =

Misal g(x) = 3log x ⇒ g'(x) =

Misal h(x) = 3x ⇒ h'(x) = 3

f '(x) =

∴ f '(x) =

**3.7.1. Turunan Fungsi Logaritmis Naturalis**

Jika f(x) = ln x, maka f '(x) =

Bukti : Karena ln x = elog x, jika huruf "a" pada logaritma diganti dengan e,

didapat

f '(x) = = ∎

∴ f(x) = ln x ⇒ D(ln x) =

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(t) = ln t

b. f(x) = (1/2 x2 ) ln x

c. f(x) =

Penyelesaian: a. f(t) = ln t

f '(t) =

b. f(x) = (1/2 x2 ) ln x

Misal g(x) = 1/2 x2 ⇒ g'(x) = x

Misal h(x) = ln x ⇒ h'(x) =

f '(x) = (1/2 x2 ). + ln x . x

∴ f '(x) = 1/2 x + x ln x

c. f(x) =

Misal g(x) = x ⇒ g'(x) = 1

Misal h(x) = ln x ⇒ h'(x) =

f '(x) =

∴ f '(x) =

**3.8. Turunan Fungsi Eksponensial**

Jika f(x) = ax , maka f '(x) = ax ln a

Bukti : f(x) = ax atau y = ax

ln y = ln ax [kedua ruas dioperasikan dengan ln]

ln y = x ln a

ln y = ln a [kedua ruas diturunkan terhadap x]

= x. 0 + ln a . 1

= ln a ; atau

= y ln a [kedua ruas dikali dengan y dari kiri]

f '(x) = ax ln a ∎ [ substitusi y dengan ax]

∴ f(x) = ax ⇒ f '(x) = D (ax) = ax ln a

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = 9x

b. f(x) = (5x )(x2 - 2x + 1)

c. f(x) =

Penyelesaian: a. f(x) = 9x

∴ f '(x) = 9x ln 9

b. f(x) = (5x )(x2 - 2x + 1)

Misal g(x) = 5x ⇒ g'(x) = 5x ln 5

Misal h(x) = (x2 - 2x + 1) ⇒ h'(x) = 2x - 2

∴ f '(x) = (5x )(2x - 2) + (x2 - 2x + 1)(5x ln 5)

c. f(x) =

Misal g(x) = 2x ⇒ g'(x) = 2x ln 2

Misal h(x) = 5x ⇒ h'(x) = 5

∴ f '(x) =

**3.8.1. Turunan Fungsi Eksponensial Dengan Bilangan Pokok e**

Jika f(x) = ex , maka f '(x) = ex

Bukti: Karena e = 2,72 ... situasi khusus dari a, maka

f '(x) = ex ln e

= ex ∎

∴ f(x) = ex ⇒ f '(x) = ex

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = ex + (2x - 7)

b. f(x) = (3x2 - 7)(2 ex )

c. f(x) =

Penyelesaian : a. f(x) = ex + (2x - 7)

Misal g(x) = ex ⇒ g'(x) = ex

Misal h(x) = (2x - 7) ⇒ h'(x) = 2

∴ f '(x) = ex + 2

b. f(x) = (3x - 7)(2 ex )

Misal g(x) = (3x2 - 7) ⇒ g'(x) = 6x

Misal h(x) = (2 ex ) ⇒ h'(x) = (2 ex )

f '(x) = (3x2 - 7)(2 ex ) + (2 ex )(6x)

∴ f '(x) = (2 e x)(3x2 + 6x - 7)

c. f(x) =

Misal g(x) = 3 ex ⇒ g'(x) = 3 ex

Misal h(x) = 3 x ⇒ h'(x) = 3

f '(x) =

∴ f '(x) =

**3.9. Turunan Fungsi Hiperbolik**

**3.9.1. Turunan Fungsi Sinus Hiperbolik**

Jika f(x) = sinh x, maka f'(x) = cosh x

Bukti: f(x) = sinh x =

dengan menerapkan turunan aturan hasil bagi diperoleh

f '(x) =

=

= cosh (x) ∎

∴ f(x) = sinh x ⇒ f '(x) = cosh x

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = 10 sinh x

b. f(x) = (5 sinh x)(2x - 10)

c. f(x) =

Penyelesaian: a. f(x) = 10 sinh x

∴ f'(x) = 10 cosh x

b. f(x) = (5 sinh x)( 2x - 10)

Misal g(x) = 5 sinh x ⇒ g'(x) = 5 cosh x

Misal h(x) = 2x - 10 ⇒ h'(x) = 2

f'(x) = (5 sinh x)2 + (5 cosh x)(2x - 10)

∴ f'(x) = 5(2 sinh x + (2x - 10)(cosh x))

c. f(x) =

Misal g(x) = 3 sinh x ⇒ g'(x) = 3 cosh x

Misal h(x) = 6 sin x ⇒ h'(x) = 6 cos x

f '(x) =

∴ f '(x) =

**3.9.2. Turunan Fungsi Cosinus Hiperbolik**

Jika f(x) = cosh x, maka f '(x) = sinh x

Bukti: f(x) = cosh x =

dengan menerapkan turunan aturan hasil bagi diperoleh

f '(x) =

=

=

= sinh (x) ∎

∴ f(x) = cosh x ⇒ f '(x) = sinh x

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = 15 cosh x

b. f(x) = (5 cosh x)(5x - 10)

c. f(x) =

Penyelesaian: a. f(x) = 15 cosh x

∴ f'(x) = 15 sinh x

b. f(x) = (5 cosh x)(5x - 10)

Misal g(x) = 5 cosh x ⇒ g'(x) = 5 sinh x

Misal h(x) = 5x - 10 ⇒ h'(x) = 5

f '(x) = (5 cosh x)5 + (5 sinh x)(5x - 10)

∴ f '(x) = 5(5 cosh x + (5x - 10)(sinh x))

c. f(x) =

Misal g(x) = 6 cosh x ⇒ g'(x) = 6 sinh x

Misal h(x) = 3 cos x ⇒ h'(x) = -3 sin x

f '(x) =

f '(x) =

∴ f '(x) =

**3.9.3. Turunan Fungsi Tangen Hiperbolik**

Jika f(x) = tanh x, maka f '(x) = = sech2 x

Bukti: f(x) = tanh x =

dengan menerapkan turunan aturan hasil bagi diperoleh

f '(x) =

f '(x) =

diketahui cosh2 x – sinh2 x = 1, sehingga

f '(x) = ∎

∴ f(x) = tanh x ⇒ f '(x) = = sech2 x

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = 3 tanh x

b. f(x = (4 x + 6)( 5 tanh x)

c. f(x) =

Penyelesaian : a. f(x) = 3 tanh x

∴ f'(x) = 3 sech x

b. f(x = (4 x + 6)( 5 tanh x)

Misal g(x) = 4x + 6 ⇒ g'(x) = 4

Misal h(x) = 5 tanh x ⇒ h'(x) = 5 sech2 x

f'(x) = (4x + 6)(5 sech2 x) + (5 tanh x) 4

∴ f'(x) = 5((4x + 6)sech2 x + 4 tanh x)

c. f(x) =

Misal g(x) = 4x - 4 ⇒ g'(x) = 4

Misal h(x) = 8 tanh x ⇒ h'(x) = 8 sech2 x

f '(x) =

f '(x) =

∴ f '(x) =

**3.9.4. Turunan Fungsi Cotangen Hiperbolik**

Jika f(x) = coth x, maka f '(x) = - = - csch2 x

Bukti: f(x) = coth x =

dengan menerapkan turunan aturan hasil bagi diperoleh

f '(x) =

f '(x) =

diketahui cosh2 x – sinh2 x = 1, sehingga

f '(x) = -

f '(x) = -

= - csch2 x ∎

∴ f(x) = coth x ⇒ f '(x) = - csch2 x

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = 10 coth x

b. f(x = (8x - 4)(4 coth x)

c. f(x) =

Penyelesaian : a. f(x) = 10 coth x

∴ f'(x) = -10 csch2 x

b. f(x = (8x - 4)(4 coth x)

Misal g(x) = 8x - 4 ⇒ g'(x) = 8

Misal h(x) = 4 coth x ⇒ h'(x) = -4 csch2 x

f'(x) = (8x - 4)(-4 csch2 x) + (4 coth x) 8

∴ f'(x) = -4((8x - 4)csch2 x - 8 coth x)

c. f(x) =

Misal g(x) = 8x - 4 ⇒ g'(x) = 8

Misal h(x) = 4 coth x ⇒ h'(x) = -4 csch2 x

f'(x) =

f'(x) =

f'(x) =

∴ f '(x) =

**3.9.5. Turunan Fungsi Secant Hiperbolik**

Jika f(x) = sech x, maka f '(x) = - sech x . tanh x

Bukti: f(x) = sech x atau f(x) =

f '(x) =

f '(x) =

f '(x) = .

= - sech x . tanh x ∎

∴ f(x) = sech x ⇒ f'(x) = - sech x . tanh x

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = - 3 sech x

b. f(x = (x2 - 2x + 1)(2x sech x)

c. f(x) =

Penyelesaian: a. f(x) = - 3 sech x

∴ f'(x) = 3 sech x tanh x

b. f(x = (x2 - 2x + 1)(2x sech x)

Misal g(x) = (x2 - 2x + 1) ⇒ g'(x) = 2x - 2

Misal h(x) = 2x sech x ⇒ h'(x) = (-2x sech x tg x + 2 sech x)

∴ f '(x) = (x2 - 2x + 1)(-2x sech x tg x + 2 sech x) + (2x sech x)(2x - 2)

c. f(x) =

Misal g(x) = 4 sech x ⇒ g'(x) = -4 sech x tanh x

Misal h(x) = 2x2 ⇒ h'(x) = 4x

f '(x) =

f '(x) =

∴ f '(x) =

**3.9.6. Turunan Fungsi Cosecant Hiperbolik**

Jika f(x) = csch x, maka f '(x) = - csch x . coth x

Bukti: f(x) = csch x atau f(x) =

f '(x) =

=

= .

= - csch x . coth x ∎

∴ f(x) = csch x ⇒ f'(x) = - csch x . coth x

Contoh : Tentukan turunan pertama dari:

a. f(x) = - 5 csch x

b. f(x = (2x + 1)(2x csch x)

c. f(x) =

Penyelesaian: a. f(x) = - 5 csch x

∴ f'(x) = 5 csch x coth x

b. f(x = (2x + 1)(2x csch x)

Misal g(x) = (2x + 1) ⇒ g'(x) = 2

Misal h(x) = 2x csch x ⇒ h'(x) = -2x(csch x coth x)

∴ f '(x) = (2x + 1)(-2x(csch x coth x) + 2(2x csch x))

c. f(x) =

Misal g(x) = 4 csch x ⇒ g'(x) = -4 csch x ctg x

Misal h(x) = 3 x2 ⇒ h'(x) = 6x

f '(x) =

f '(x) =

∴ f '(x) =

**L A T I H A N**

Tentukan turunan pertama dari

1. f(x) = x-17

2. f(x) = 5 + 2x + 3 x2

3. f(x) = g(x) - h(x) dengan g(x) = x2 - 2x dan h(x) = 25

4. f(x) = ax2 + + c

5. f(x) = g(x).h(x) dengan g(x) = (4x2 -3x) dan h(x) = (2x - 1)

6. f(x) = (2x-1)(x2 - 2x + 1)

7. f(x) = 1/x3

8. f(x) =

9. f(x) =

10. f(x) =

11. f(x) = (1 - 3x)-2/3

12. f(x) =

13. f(x) = log 3 ( x3 - 4 x2 + x - 10)

14. f(x) = 1/4 ( x3 - 3 x2 + 5 )

15. f(x) = sin x + 5 x2

16. f(x) = tan x - cos x

17. f(x) = (sin x + 5)( sec x - 4)

18. f(x) =

19. f(x) = (1 - cos 1/2 x)2

20. f(x) = 0.333 ( sin x - csc x )

21. f(x) = log x - 3

22. f(x) = log (x + 2)(x-2)

23. f(x) = log

24. f(x) = log (x + 5)5

25. f(x) = 3x ln x

25. f(x) =

26. f(x) = ln x2

27. f(x) = a0.5 x

28. f(x) = 5x . ax

29. f(x) =

30. f(x) = 2x . ex

31. f(x) =

32. f(x) = 5x . sinh x

33. f(x) = 3 sin x + 4 cosh x

34. f(x) = 7 tanh x . cos x

35. f(x) = cosh x . tan x